2eme méthode

Soit I le point d'affixe $z_I = 1$ on a :

$|z| = |z-1| \Leftrightarrow |z-0| = |z-z_I|$

$\Leftrightarrow$ OM = IM : donc M décrit la médiatrice du segment [OI]

● $|z| = |z-1| \iff z = \frac{1}{2} + iy, y \in IR$

Or on a: $Arg(z)+Arg(z-1) \equiv Arg[z.(z-1)]\ [2\pi]$

Et puisque : $z.(z-1) = (\frac{1}{2}+iy).(\frac{1}{2}+iy-1)$

$= (\frac{1}{2}+iy).(-\frac{1}{2}+iy)$

$= -\frac{1}{4} - y^2 < 0$

C'est adire : z . (z – 1) est un réel strictement négatif donc son Arg est π

Ce qui prouve que : $Arg(z)+Arg(z-1) \equiv \pi\ [2\pi]$

Conclusion :

$$|z| = |z-1 \Leftrightarrow Arg(z) + Arg(z-1) \equiv \pi\ [2\pi]$$

Exercice n° 8

● $|1+i| = \sqrt{2}$ et $Arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

• $|1+i\sqrt{3}| = 2$ et $Arg(1+i\sqrt{3}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

Donc $Z = \frac{\left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]}{\left[2, \frac{\pi}{3}\right]} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right]$

$= \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{12}\right]$

$$\boxed{Z = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{12}\right]}$$

● $Z = \frac{1+i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{(1+i)(1-i\sqrt{3})}{1^2+\sqrt{3}^2}$

$= \frac{1-i\sqrt{3}+i+\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

Donc : $\boxed{Z = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{1-\sqrt{3}}{2}}$

● $Z = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{12}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{12}) + i\sin(-\frac{\pi}{12})\right]$

Comme deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire on aura :

$$\cos(-\frac{\pi}{12}) = \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(-\frac{\pi}{12}) = -\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Donc : $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$

Par suite $tg\frac{\pi}{12} = \frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} =$

$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{4} = \frac{4-2\sqrt{3}}{4} = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}$

D'où $\boxed{tg\frac{\pi}{12} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$

Exercice n° 9

• $m = \frac{b+c}{2}$

● Soient: $z_{B'} = b'$ et $z_{C'} = c'$ les affixes respectivement des points B' et C'

On a : BAB' est un triangle rectangle et isocèle de sens direct en A donc :

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ AB' = AB \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_{B'} - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ |z_B - z_A| = |z_{B'} - z_A| \end{cases}$$

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn